数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 67-78

トーラス多様体上の変換群について

大阪市立大学数学研究所　黒木　慎太郎 (Shintarô Kuroki)
Osaka City university Advanced Mathematical Institute

ABSTRACT. 本論説では、どの 2n 次元トーラス多様体 (M, T) が推移的（余次元 0）または余次元 1 の軌道を持つ作用 (M, G) に拡張するかを調べる。ここで G は n 次元のトーラス T を極大トーラスとして含むコンパクトリー群とする。

1. トーリックトポロジーの現在の主役（トーラス多様体）

今回の研究の中心的な題材であるトーラス多様体とは新興の分野である**トーリックトポロジー**で現在最も盛んに研究されている多様体のクラスである。本研究の内容に入る前にトーリックトポロジーとはどんな分野なのか？トーラス多様体とは何なのか？どんな研究がなされているのか？を簡単に述べておきたいと思う。

1.1. トーリックトポロジー. トーリックトポロジーとは、トーラス T の作用を持つ多様体 M の軌道空間 M/T に良い構造が入る場合に、代数的、組み合わせ論的、微分幾何的にまたはホモトピー論的な側面からその性質を研究しようと言う分野である。もちろん昔から続くトーラス作用の深い研究を動機として生まれた呼び名である。特に代数幾何で発見され、発展したトーリック多様体の研究（**トーリック幾何**）がトーリックトポロジーと呼ぶにいたった直接の動機を与えている。ここで、**トーリック多様体**とは、M が複素 n 次元正規代数多様体で代数的なトーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用をもち、その作用が稠密な軌道を持つとき（つまり $(\mathbb{C}^*)^n$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ への自然な作用が M へ拡張しているとき）のことを言う。$(\mathbb{C}^*)^n$ の極大コンパクト群が T なので、T への制限作用によりトーラス作用を持つ多様体だと思える（T を位相的なトーラスだと思っている)。トーリック多様体の代数幾何的な構造を全て忘れること（位相的に一般化すること）で Hattori-Masuda が定義したトーラス多様体 [Hat-Ma03] の定義を与えることができる。まず始めはトーラス多様体の定義から入ろう。

1.2. トーラス多様体. 2n 次元の向きつけられたコンパクト連結多様体 M とその上に作用する n 次元のトーラス T との組を (M, T) と書く。(M, T) が次の三つの条件を満たす時にトーラス多様体と言う。

(1) T の作用は効果的かつ滑らかである。
(2) T 作用による不動点集合 M^T が空ではない（自動的に M^T は有限集合になる)。
(3) M が omnioriented.

ここで T の作用を持つ多様体 M が *omnioriented* であることを定義しておく。まず M の特性部分多様体 M_i とは次の三つの条件を満たす部分多様体のことである。

この研究は大阪市立大学数学研究所（OCAMI）と財団法人風樹会の援助の下に行われている。また、この論説は２００６年１１月の数理解析研究所研究集会「特異点論とオーミニマルカテゴリー」で行った講演に基づくものである.

- $\dim M_i = 2n - 2$.
- $M_i = (M^C)^o$, つまり T の部分群 $C(\simeq S^1)$ による不動点集合の連結成分。
- $M_i \cap M^T \neq \emptyset$.

M に対する向きと全ての特性部分多様体 M_i に対する向きが指定されている時 M は omnioriented と呼ばれる。今回の研究では omnioriented の条件は本質的ではないので条件 (1),(2) を満たすものを**トーラス多様体**と呼ぶことにする。いくつか例を挙げる。

Example. T の元 $(t_1, \cdots, t_n)$ を複素射影空間 $\mathbb{C}P(n)$ の斉次座標 $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ の後ろの n コの成分に掛ける $[z_0 : t_1z_1 : \cdots : t_nz_n]$。これで定義された作用で $(\mathbb{C}P(n), T)$ はトーラス多様体になる。

また、その軌道空間 M/T は n 次元単体 Δ^n となり、最も簡単な多面体の構造を持っている。よって $(\mathbb{C}P(n), T)$ はトーリックトポロジーにおいて最も基本となる例になっている。

Example. 2n 次元の球面 $S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}(\simeq \mathbb{R}^{2n+1})$ に対して、T を $\mathbb{C}^n$ への標準的な掛け算と思って T の S^{2n} 上への作用を定義すると (S^{2n}, T) はトーラス多様体。$n \geq 2$ ならばこれはトーリック多様体でない例になっている。

その軌道空間の 1-skelton は 2 点を結ぶ 2n 本の辺からなることがわかる。つまり M/T は多面体にはならないことがわかる。

1.3. **研究の動機と結果.** トーラス多様体の歴史について簡単に振り返ってみよう。1999 年、M. Masuda は論文 [Ma99] の中で unitary toric という多様体のクラスを研究した。その中で多重扇と呼ばれる、トーリック多様体に対する扇のような、組み合わせ的な概念が導入された。多重扇とは各コーンの重なりを許したような扇の事である。よって一般の扇を含むものとなっている。トーラス多様体は [Hat-Ma03] で多重扇が研究された際に unitary toric を更に一般化する形で定義された物である。多重扇の理論が [Hat-Ma03] では展開されている。また軌道空間の組み合わせてきな構造から同変コホモロジー環を記述した研究 [Ma-Pa06] もある。

[Ma-Pa06] の研究はまったく位相幾何的な動機によるものであるが、[Hat-Ma03] の多重扇の研究のようにトーラス多様体の研究は代数幾何を動機として位相幾何的な方向へ一般化することが可能な場合がある。今回の研究は次の代数幾何の研究を動機とする。

Demazure は 1970 年にトーリック多様体 M に関する Aut(M) の構造に関して研究を行った [De70]。もちろん M に元々作用していた $(\mathbb{C}^*)^n$ は Aut(M) の中に含まれている。Demazure の研究を次のような問題として見直してみよう。

Problem 1. トーリック多様体 M 上の $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用はどんな群 G の作用に拡張するか？

Demazure の研究は代数幾何的に最も広い G(= Aut(M)) の構造を研究しているといえる。トーラス多様体についてこの問題はどうなるであろうか？代数的なトーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の極大コンパクト部分群 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ が位相的なトーラスに当たる物であるといえるので、次のように言い換えることができる。

Problem 2. トーラス多様体 (M, T) の T 作用はどんな群 G の作用へ拡張するか？

位相幾何的に最も広い G は同相写像全体 Homeo(M) であるがその構造をいきなり考えるのは難しいので、今回は研究しやすいように制限をつけた次の問題を考えてみる。

Problem 3. コンパクト連結リー群 G は T を極大可換部分群（極大トーラス）として含み変換群 (M, G) は推移的または余次元一の主軌道をもつものとする。G 作用を T へ制限した変換群 (M, T) がトーラス多様体になるような変換群 (M, G) を分類せよ。

Problem 3 を解くことが目標になる。今後 G は T を極大トーラスとして含むコンパクト連結リー群と仮定する。次の二つの結果を得た。

Theorem A . トーラス多様体 (M, T) が推移的な作用 (M, G) へ拡張すると仮定する。その時、M は次の多様体と微分同相になる。

$$\prod_{h=1}^{a} \mathbb{C}P(l_h) \times \prod_{i=1}^{b} S^{2m_i}.$$

ここで $\mathbb{C}P(l_h)$ は $2l_h$ 次元の複素射影空間で、S^{2m_i} は $2m_i$ 次元の球面。また、G は次の群と局所同型になる（リー環が同型になる）。

$$\prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times \prod_{i=1}^{b} SO(2m_i+1).$$

G は局所同型を通して M に推移的に作用している（$\sum_{h=1}^{a} l_h + \sum_{i=1}^{b} m_i = n = \dim T$ になる)。

Theorem B . トーラス多様体 (M, T) が余次元一の軌道をもつ (M, G) へ拡張し $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ と仮定する。その時、M は次のいずれかの多様体と微分同相になる。

(1) $M_\rho^S = \prod_{i=1}^{b} S^{2m_i} \times \{(\prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1)) \times_{\prod_{h=1}^{a} S(U(1)\times U(l_h))} S(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{R})\}$,
(2) $M_0^S = \prod_{i=1}^{b} S^{2m_i} \times \prod_{h=1}^{a} \mathbb{C}P(l_h) \times S(\mathbb{R}^{2k_1} \oplus \mathbb{R})$,
(3) $M_{\rho,k_1,k_2}^P = \prod_{i=1}^{b} S^{2m_i} \times \left\{\left(\prod_{h=1}^{a-1} SU(l_h+1)\right) \times_{\prod_{h=1}^{a-1} S(U(1)\times U(l_h))} P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})\right\}$,
(4) $M_{\rho,k_1,k_2}^S = \prod_{i=1}^{b-1} S^{2m_i} \times \{(\prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1)) \times_{\prod_{h=1}^{a} S(U(1)\times U(l_h))} S(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{R}^{2k_2+1})\}$,
(5) $M_{0,k_1,k_2}^S = \prod_{i=1}^{b-1} S^{2m_i} \times \prod_{h=1}^{a} \mathbb{C}P(l_h) \times S(\mathbb{R}^{2k_1} \oplus \mathbb{R}^{2k_2+1})$,

また対応する G は次のようになる。

(1) $G = \prod_{i=1}^{b} SO(2m_i+1) \times \prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times U(k_1)$,
(2) $G = \prod_{i=1}^{b} SO(2m_i+1) \times \prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times SO(2k_1)$,
(3) $G = \prod_{i=1}^{b} SO(2m_i+1) \times \prod_{h=1}^{a-1} SU(l_h+1) \times S(U(k_1) \times U(k_2))$,
(4) $G = \prod_{i=1}^{b-1} SO(2m_i+1) \times \prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times U(k_1) \times SO(2k_2+1)$,
(5) $G = \prod_{i=1}^{b-1} SO(2m_i+1) \times \prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times SO(2k_1) \times SO(2k_2+1)$.

ここで $\mathbb{C}_\rho^{k_1}$ は k_1 次元の複素ベクトル空間で次の $\prod_{h=1}^{a} S(U(1) \times U(l_h))$ 表現 ρ から誘導される作用を持つ。

$$\rho : \left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} t_a & 0 \\ 0 & A_a \end{pmatrix} \right) \mapsto t_1^{r_1} \cdots t_a^{r_a} \in S^1.$$

自動的に次の系がトーリック多様体について成立する。

Corollary B . *Theorem B* の仮定の下で (M, T) がトーリック多様体であるとする。その時 (M, G) は、次のようになる。

$$M_{\rho,k_1,k_2} = \left(\prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1)\right) \times_{\prod_{h=1}^{a} S(U(1)\times U(l_h))} P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2}),$$

$$G \simeq \prod_{h=1}^{a} SU(l_h+1) \times S(U(k_1) \times SU(k_2)),$$

ここで $\sum_{h=1}^{a} l_h + k_1 + k_2 - 1 = n = \dim T$.

上の系に出てくる多様体は **complexity one extended Bott tower** [1] と呼ばれている物で **Hirzebruch 曲面** ($\mathbb{C}P(1)$ 上の $\mathbb{C}P(1)$ バンドル) の一般化になっている。実際、$k_1 = k_2 = a = 1 = l_1$ の場合が Hirzebruch 曲面になる。

1.4. この論文の構成と証明のアウトライン. Theorem A, B の証明のアウトラインを述べると同時にこの論説構成も述べる。次の 2 章では古典的なリー群論の結果 [戸田-三村] と変換群論の結果 [Br72], [川久保 87] を紹介し、Theorem A の証明をする。証明は単連結単純リー群の分類の結果とその極大階数部分群の分類の結果から得ることができる。Theorem B の証明は 3 章で $n = 2$ の場合の概略を述べるにとどめる。分類は内田の方法 [Uc77] に沿って行う。まず準備として変換群論からの結果を準備する。そして特異軌道の候補を分類し、そのスライス表現を全て数え上げる。スライス表現が全てわかったと言うことは特異軌道の管状近傍が全てわかったと言うことに等しい。次に二つの管状近傍を張り合わせて多様体を構成する。それが欲しい多様体になる。最後にどの多様体が同じかを考察して分類は完成する。

1.5. トーリックトポロジーの今後の主役の候補. 話は少し脇にそれるが、次の章に入る前にトーリックトポロジーの今後の主役の候補に当たる物を述べておきたいと思う。トーラス多様体は代数幾何で発展したトーリック多様体の直接の一般化であり、トーリックトポロジーはトーリック幾何を動機として起こった分野であることは述べた。その一方でトーリックトポロジーとは、トーラス T の作用を持つ多様体 M でその軌道空間 M/T に良い構造が入る物を様々な側面から研究しようとする分野であることも述べた。つまり、トーリックトポロジーが対象とする空間はトーラス多様体だけではない。トーラス多様体はトーリックトポロジーの中で研究され得る対象の一つのクラスである。では次に研究されるべきなトーリックトポロジーのクラスとはいったいなんであろうか？

M/T の構造が良い多様体のクラスとして次の性質を満たすトーラス作用を持つ多様体 W^{2m} とそのトーラス T^n の組 (W^{2m}, T^n) がある（$m \le n$)。

(1) 0 次元軌道の集合（不動点集合 W^T）は軌道空間 W/T の中で 0 次元になる。
(2) 1 次元軌道の集合は W/T の中で 1 次元軌道になる。

---

[1]Bott tower とは $\mathbb{C}P(1)$ 上の $\mathbb{C}P(1)$ バンドルの $\mathbb{C}P(1)$ バンドルを取り更にその $\mathbb{C}P(1)$ バンドルを取り … というように $\mathbb{C}P(1)$ がいくつも重なって塔になったような構造をもつ多様体の事である。extended Bott tower とはその塔の各階にある $\mathbb{C}P(1)$ が一般の複素射影空間に変わった多様体を言う。complexity one extended Bott tower とは、複素射影空間の直積上の複素射影空間バンドルつまり extended Bott tower の最後の階だけがねじられているような多様体の事である。

上のような性質を満たす (W^{2m}, T^n) のことを GKM 多様体と言う（[Gu-Ho-Za06]）。これらの仮定の下、軌道空間のなかで 0, 1 次元の集合はグラフの構造を持つことがわかる。すぐにわかるようにトーラス多様体 (M^{2n}, T^n) は GKM 多様体である。多様体の次元が最大になる GKM 多様体がトーラス多様体であるともいえる。

現在盛んになりつつある GKM 多様体のクラスで、トーラス多様体の次に重要と思われるクラスがある。ハイパートーリックと呼ばれるトーリック多様体をハイパーケーラーで類似したクラスである [Har-Ho05]。これは多様体の次元とトーラスの次元の関係として (W^{4n}, T^{n+1}) なる関係にあるものである。つまり $n \geq 2$ ならばトーラス多様体ではない。しかし超平面配置と言う面白い組み合わせ論的な対象と対応している（一方のトーラス多様体は多面体もしくは角付き多様体である）。実は (W^{4n}, T^{n+1}) のクラスに入る GKM 多様体はハイパートーリックだけではない、後に述べるように四元数射影空間 $\mathbb{H}P(n)$ や複素二次超曲面 Q_{2n} も入ってくる。そのような対象を含むということは、変換群論的な課題が残った R. Scott のトーリックの四元数化 [Sc95] を彼とはまったく違う形で定式化できる可能性があるということだ。(W^{4n}, T^{n+1}) なるクラスの定式化（トーラス多様体の四元数化）も今後の一つの問題である。

次の章から (M, G) が推移的な場合と、余次元一の軌道を持つ場合とに分けて分類していこう。(M, G) の同値関係はその効果的な作用への誘導作用が同変同型の場合にする（essential isormophism）。

2. 推移的な場合

(M, T) の T を極大トーラスとして持つコンパクトリー群 G への作用の拡張 (M, G) が推移的な作用になると仮定する。この場合は次の結果からリー群論の範疇に入る問題になる。リー群論に関しては [戸田-三村] を参照のこと。

Theorem 2.1 ([Gu-Ho-Za06]). M に G が推移的に作用すると仮定すると、次は同値。

(1) (M, T) が GKM 多様体（T は G の極大トーラスとする）。
(2) $\chi(M) = \sum_i \operatorname{rank} H^i(M) \neq 0$.
(3) $M = G/H$ で H は G の閉連結部分群で T を含む（このような H を最大階数部分群と言う）。

トーラス多様体は GKM 多様体になっていたのでこの定理を満たしている。よって推移的な場合は次の問題を解けばよい。

Problem . コンパクト連結リー群 G とその最大階数部分群 H の組 (G, H) を分類せよ。但し、G の極大トーラス T に対して $(G/H, T)$ がトーラス多様体になるものとする（つまり $n = \dim T = \frac{1}{2}\dim G/H = \frac{1}{2}(\dim G - \dim H)$ を満たすとする）。

リー群論の結果を使ってこの問題を解こう。まず次の古典的な補題を準備しておく。

Lemma 2.2. G をコンパクトリー群とすると、有限被覆を取って $\hat{G} = G_1 \times \cdots \times G_k \times T'$ の形にすることができる。また $H \subset G$ が最大階数部分群なら $\hat{H} = H_1 \times \cdots \times H_k \times T'$ とできる。ここで G_i は単連結単純リー群で H_i はその最大階数部分群、T' はトーラス。

今、(M, G) を essential isomorphism の下で分類したいので、最初の作用 (M, G) の時点で G をこの補題の様に仮定しておけば $(G/H, T)$ は $(G_1/H_1 \times \cdots \times G_k/H_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ の形にしても良いことがわかる。ここで T_i は G_i と H_i に含まれる極大トーラスである。次の補題が成立している。

Lemma 2.3. もしも $(G/H, T)$ がトーラス多様体なら、それぞれの $(G_i/H_i, T_i)$ $(i = 1, \cdots, k)$ はトーラス多様体（つまり $2\dim T_i = \dim G_i/H_i$）になる。

Proof. $(M, T) = (G/H, T)$ がトーラス多様体なので、次の等式を得る。

$$2\dim T = 2n = \dim(G/H) = \sum_{i=1}^{k} \dim(G_i/H_i) = 2\sum_{i=1}^{k} \dim T_i. \tag{2.1}$$

$p = (p_1, \cdots, p_k) \in M^T = M_1^{T_1} \times \cdots \times M_k^{T_k}$ 上の tangential representation は次の分解を与える。

$$T_p(M) = T_{p_1}(M_1) \oplus \cdots \oplus T_{p_k}(M_k).$$

更にそれぞれのファクター $T_{p_i}(M_i)$ は T_i の tangential representation によって次のように分解する。

$$T_{p_i}(M_i) = V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_l)$$

(M, T) がトーラス多様体なのでウェイト $\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in \mathfrak{t}_i^*$ は線形独立になる。

もしも $2\dim T_j > \dim G_j/H_j$ なるファクターが存在するとしたら、等式2.1と鳩ノ巣原理から $2\dim T_i < \dim G_i/H_i$ なるファクターが存在することになる。しかし、これは $\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in \mathfrak{t}_i^*$ が線形独立であることに反する。ゆえに、任意の $i = 1, \cdots, k$ に対して $\dim G_i/H_i = 2\dim T_i$ が成り立つ。 □

この補題によって、Theorem A を示すためには、トーラス多様体 G_i/H_i になるような単純リー群 G_i とその極大階数部分群 H_i の組を分類すればよいことがわかる。つまり $\dim G_i/H_i = \dim G_i - \dim H_i = 2\,\mathrm{rank}\, G_i$ なる組を見つければよいことになる。

S を単純コンパクトリー群、S' を閉最大階数部分群とする。その時次の分類結果がある([戸田-三村] 第五章)。

S	A_l	B_l			C_l	
S'	$A_{i-1} \times A_{l-i} \times T^1$	$B_{l-1} \times T^1$	$B_{i-1} \times D_{l-i+1}$	D_l	$C_{i-1} \times C_{l-i+1}$	$A_{l-1} \times T^1$

S	$D_l\ (l \geq 3)$			E_6		
S'	$D_{l-1} \times T^1$	$D_{i-1} \times D_{l-i+1}$	$A_{l-1} \times T^1$	$D_5 \times T^1$	$A_1 \times A_5$	$A_2 \times A_2 \times A_2$

S	E_7				E_8				
S'	$D_6 \times A_1$	A_7	$A_2 \times A_5$	$E_6 \times T^1$	D_8	A_8	$A_4 \times A_4$	$E_6 \times A_2$	$E_7 \times A_1$

S	F_4			G_2	
S'	$C_3 \times A_1$	$A_2 \times A_2$	B_4	A_2	$A_1 \times A_1$

ここで $A_l \approx SU(l+1)$, $B_l \approx SO(2l+1)$, $C_l \approx Sp(l)$, $D_l \approx SO(2l)$ は古典リー群である。E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 は例外リー群である。それぞれの S の次元は以下のようになる。

$$\dim A_l = l^2 + 2l, \quad \dim B_l = \dim C_l = (2l+1)l, \quad \dim D_l = l(2l-1)$$
$$\dim E_6 = 78,\ \dim E_7 = 133,\ \dim E_8 = 248,\ \dim F_4 = 52,\ \dim G_2 = 14.$$

よって $\dim S/S' = \dim S - \dim S'$ が次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\dim A_l/(A_{i-1} \times A_{l-i} \times T^1) = -2i^2 + 2li + 2i\ (1 \le i < l),\\
&\dim B_l/(B_{l-1} \times T^1) = 4l - 2,\\
&\dim B_l/(B_{i-1} \times D_{l-i+1}) = -2l - 4i^2 + 6i - 2 + 4li\ (1 < i < l), \quad \dim B_l/D_l = 2l,\\
&\dim C_l/(C_{i-1} \times C_{l-i+1}) = -4i^2 + 8i - 4 + 4li - 4l\ (1 \le i < l),\\
&\dim C_l/(A_{l-1} \times T^1) = l^2 + l, \quad \dim D_l/(D_{l-1} \times T^1) = 4l - 4,\\
&\dim D_l/(D_{i-1} \times D_{l-i+1}) = 8i - 4i^2 + 4li - 4 - 4l, \quad \dim D_l/(A_{l-1} \times T^1) = l^2 - l,\\
&\dim E_6/(D_5 \times T^1) = 32, \quad \dim E_6/(A_1 \times A_5) = 40, \quad \dim E_6/(A_2 \times A_2 \times A_2) = 54,\\
&\dim E_7/(D_6 \times A_1) = 64, \quad \dim E_7/A_7 = 70, \quad \dim E_7/(A_2 \times A_5) = 90,\\
&\dim E_7/(E_6 \times T^1) = 54, \quad \dim E_8/D_8 = 158, \quad \dim E_8/A_8 = 168,\\
&\dim E_8/(A_4 \times A_4) = 200, \quad \dim E_8/(E_6 \times A_2) = 162, \quad \dim E_8/(E_7 \times A_1) = 112,\\
&\dim F_4/(C_3 \times A_1) = 28, \quad \dim F_4/(A_2 \times A_2) = 36, \quad \dim F_4/B_4 = 16,\\
&\dim G_2/A_2 = 6, \quad \dim G_2/(A_1 \times A_1) = 8.
\end{aligned}$$

上のどれが $2l(= 2\,\mathrm{rank}\,S)$ を満たすかを調べれば次を得る。

$$\begin{aligned}
&A_l/(A_{l-1} \times T^1) \cong SU(l+1)/S(U(l) \times U(1)) \cong \mathbb{C}P(l)\\
&B_l/D_l \cong SO(2l+1)/SO(2l) \cong S^{2l}\\
&B_1/T^1 \cong SO(3)/SO(2) \cong S^2 \cong Sp(1)/T^1 \cong C_1/T^1\\
&D_3/(A_2 \times T^1) \cong Spin(6)/U(3) \cong SU(4)/S(U(3) \times U(1)) \cong A_4/(A_3 \times T^1) \cong \mathbb{C}P^3
\end{aligned}$$

もしも S" が最大階数だが、極大な部分群でないなら S" は極大な最大階数部分群 S′ のいずれかの部分群になる（上にある (S, S′) のリストの中の)。よって $\dim S/S'' > \dim S/S'$ になるので、そのような S" が含まれないことが次元の関係からわかる。よって次の補題を得る。

Lemma 2.4. $(G_i/H_i, T)$ を $G_i \supset H_i \supset T$, $\dim G_i/H_i = 2\dim T = 2l$ なる対とする。更に G_i が単純連結コンパクトリー群であるとすると、$G_i/H_i \cong S^{2l}$, $\mathbb{R}P(2l)$ か $\mathbb{C}P(l)$ が成立する。

以上の議論から Theorem A が成り立つ。

2.1. **補足.** トーラス多様体 (M^{2n}, T^n) の拡張が推移的になる場合の分類を完成させたので、今度はトーラス多様体でない場合 (W^{2m}, T^n) についても同様の問題を考えてみよう。1.5 章で述べたトーリックトポロジーの次の主役の候補となるクラス (W^{4n}, T^{n+1}) に関してこの問題を考えてみる。問題設定は次のようになる。

Problem . (W^{4n}, T^{n+1}) を *GKM* 多様体とする。(W, G) への拡張が推移的になる場合を分類せよ。つまり、*Theorem* 2.2 からコンパクトリー群とその極大連結部分群の組 (G, H) で、$\dim G/H = 4\dim T + 1$ なる物を分類せよ。

この問題も先の方法で簡単に解けそうに思えるが一つ注意すべき部分がある。Lemma 2.3 に当たる物がないのだ。次の例がその反例を与える。

Example. $W^8 = S^2 \times S^6$ 上の $T^3 = T^1 \times T^2$ 作用を次のように定義する。

- T^1 を S^2 へ標準的に、
- T^2 を S^6 へ $S^6 = G_2/SU(3)$ と見て、$T^2 \subset SU(3) \subset G_2$ を通して作用させる。

すると (W^8, T^3) は今考えているクラスに入るがそれぞれの成分は (W^{4n}, T^{n+1}) なるクラスには入らない。

よってこの場合を分類するには少し注意が必要であるが、もしも G が単純ならばコンパクトリー群の分類の結果より簡単に知ることができる。

Proposition 2.5. (W^{4n}, T^{n+1}) がコンパクト単純リー群 G の推移的な作用 (W, G) へ拡張するとするとそれは次のいずれかになる[2]。

(1) $(\mathbb{H}P(n), Sp(n+1))$, $\mathbb{H}P(n)$ は四元数射影空間 $Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$.
(2) $(Q_{2n}, SO(2n+2))$, Q_{2n} は複素二次超曲面 $SO(2n+2)/SO(2n) \times SO(2)$.
(3) $(\mathbb{C}G_{n,2}, SU(n+2))$, $\mathbb{C}G_{n,2}$ は複素グラスマン多様体 $SU(n+2)/S(U(n) \times U(2))$.

3. 余次元一の軌道を持つ場合

(M, T) の T を極大トーラスとして持つコンパクトリー群 G への作用の拡張 (M, G) が余次元一の軌道を持つ作用になると仮定する。推移的な場合はほぼリー群論だけで解けたが、この場合は変換群論を使う必要がある。

3.1. 変換群論からの準備. まず始めに、次の構造定理を用いるために $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ なる仮定を入れよう。

Theorem 3.1 (Uchida[Uc77] Lemma 1.2.1). G をコンパクトな連結リー群、M を閉連結多様体で $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ を満たすとする。G が滑らかに M に作用し、余次元一の軌道 $G(x)$ を持つとする。その時 $G(x) \cong G/K$ は主軌道となり、(M, G) はちょうど二つの特異軌道 $G(x_1) \cong G/K_1$ と $G(x_2) \cong G/K_2$ を持つ。更に、閉不変な $G(x_s)$ の管状近傍 X_s が存在し、

$$M = X_1 \cup X_2 \quad \text{and} \quad X_1 \cap X_2 = \partial X_1 = \partial X_2$$

を満たす。

最初に入れた仮定からこの定理のような構造が我々の場合には入る。更に二つの管状近傍の様子が次の可微分スライス定理からわかる [Br72]。

Theorem 3.2 (可微分スライス定理). G をコンパクトリー群、M を滑らかな G 多様体とする。その時任意の $x_i \in M$ の軌道 $G(x_i) \cong G/K_i$ に対して、閉不変管状近傍 X_i が存在し G 多様体として $X_i \cong G \times_{K_i} D_{x_i}$ となる。ここで D_{x_i} は閉円盤で、表現 $\sigma_i : K_i \to O(D_{x_i})$ を通して K_i が作用している。

[2]非コンパクトな多様体であるので、ここにはハイパートーリックは出てこない。

この表現 σ_i のことをスライス表現と呼ぶ。特異軌道の余次元を m_i $(i = 1, 2)$ と置こう。その時 G/K_1 と G/K_2 の管状近傍は $X_1 \cong G \times_{K_1} D^{m_1}$ と $X_2 \cong G \times_{K_2} D^{m_2}$ と書ける。但し K_i は D^{m_i} 上にスライス表現 $\sigma_i : K_i \to O(m_i)$ を通して作用する。

更に余次元が一である仮定より $K_i/K \cong S^{m_i-1} \subset D^{m_i}$ がわかる。つまり K_i が $S^{m_i-1} \subset D^{m_i}$ に推移的に作用していることがわかる。球面上への推移的な作用はよくわかっていて次のような結果が知られている（[Mo-Sa43], [Bo50], [Po59]）。

Theorem 3.3. G をコンパクトリー群としホモトピー球面 Σ^m に効果的かつ推移的に作用しているとする。H をイソトロピー部分群とするとき、G の単純正規部分群 G_1 が存在し $G_1/(G_1 \cap H) = \Sigma^m$ が成立する。

Theorem 3.4. G_1 を G の中の単純部分群で $G_1/H_1 \cong \Sigma^m$ を満たすとすると、[Bo50], [Mo-Sa43] から次を得る。

(1) もしも m が偶数ならば $G_1 = SO(m+1)$ か例外リー群 G_2（$m = 6$）となる。
(2) もしも $m = 2l - 1$ で l が奇数なら $G_1 = SO(m+1)$ か $SU(l)$ になる。
(3) もしも $m = 2l - 1$ で l が偶数なら $G_1 = SO(m+1), SU(l), Sp(l/2), Spin(9)$（$m = 15$, $l = 8$）か $Spin(7)$（$m = 7, l = 4$）になる。

それぞれの場合で $H_1 = G_1 \cap SO(m)$ なる G_1 の $SO(m+1)$ への一意な埋め込みがある。ゆえに Σ^m は S^m と微分同相になる。次の定理も成立している。

Theorem 3.5. $G_1 (\subset G)$ を *Theorem 3.4* にある単純部分群とする。その時 $G_1 \subset G \subset N(G_1)^o \subset SO(m+1)$、但し $N(G_1)^o$ は G_1 の $SO(m+1)$ における正規化群の単位成分で、次が成立する。

(1) $G_1 = SO(m+1), G_2$ $(m = 6)$, $Spin(7)$ $(m = 7, l = 4)$ か $Spin(9)$ $(m = 15, l = 8)$ の場合、$N(G_1)^o = G_1$ つまり $G_1 = G$ が成り立つ。
(2) $G_1 = SU(l)$ の時、$N(G_1)^o = U(l)$. ゆえに $G = G_1$ か $U(l)$.
(3) $G_1 = Sp(\frac{l}{2})$ の時、$N(G_1)^o = Sp(\frac{l}{2}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^3$、但し $\mathbb{Z}_2$ は $(-Id, -1)$ で生成された部分群。ゆえに G は $G_1, Sp(\frac{l}{2}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ か $Sp(\frac{l}{2}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^3$.

上の結果は [Hs-Hs65] にも載っている。特に次の補題を得ることができる。

Lemma 3.6. $O(2l)$ の連結部分群 H が S^{2l-1} に推移的に作用していて $\mathrm{rank}\, H = l$ だとすると、$O(2l)$ のなかで $H \simeq U(l)$ か $SO(2l)$.

Theorem 3.2 から Lemma 3.6 は G/K_1 と G/K_2 の局所的な構造に関する結果である。その一方で Theorem 3.1 と次の補題は (M, G) の大域的な構造に関係する物である。

Lemma 3.7 ([Uc77] Lemma 5.3.1). $f, f' : \partial X_1 \to \partial X_2$ を G 同変微分同相写像、但し ∂X_i は X_i の境界。その時もしも以下のいずれかを満たしていれば $M(f)$ は $M(f')$ と同変微分同相になる（但し $M(f) = X_1 \cup_f X_2$）。

(1) f が f' と G-*diffeotopic*.
(2) $f^{-1}f'$ が X_1 上の G 同変微分同相写像へ拡張する。
(3) $f'f^{-1}$ が X_2 上の G 同変微分同相写像へ拡張する。

以上を古典的な変換群論からの準備とし、次の章から本格的な分類に取り組んでいこう。

3.2. **特異軌道の分類.** この章では特異軌道の候補となりうる多様体を全て分類しよう。まず始めは次の補題から入る。

Lemma 3.8. T 作用の不動点集合 M^T の点の軌道は必ず特異軌道になる。

Proof. $p \in M^T$ とする。p の G イソトロピー群を G_p と書くと、$T \subset G_p$ を得る。故に rank G_p は rank G と一致する。従って G/G_p は偶数次元になる。 □

証明抜きに次の命題を用意する。

Proposition 3.9. M' は T 不変なトーラス多様体 (M, T) の部分多様体。もしも M' が不動点 $p \in M^T$ を持つなら $(M', T/T'')$ はある $T'' \subset T$ に関してトーラス多様体になる。

よって次の系を得る。

Corollary 3.10. 少なくとも一つの (M, G) の特異軌道はトーラス多様体になる。

ある $T'' \subset T$ に対して $(G/K_1, T/T'')$ をトーラス多様体と仮定しておこう。この時次の分解を得る。

$$G = G_1' \times G''_1 \supset K_1 = K_1' \times G''_1 \supset T' \times T'' \simeq T.$$

ここで T' を G_1' の極大トーラス部分群とする。$k_1 = \operatorname{rank} G''_1 = \dim T''$, $p \in M^T$ と置くと、$\dim N_p(G/K_1) = 2k_1$ がわかる。よって、

$$\dim G/K_1 = 2n - 2k_1 = 2n - 2 \operatorname{rank} G''_1$$

が成り立つ。トーラス多様体 $(G_1'/K_1', T') = (G/K_1, T)$ が推移的な作用 $(G_1'/K_1', G_1')$ へ拡張するので、以上の議論と、Theorem A から、

$$G_1'/K_1' \cong \prod_{i=1}^{a} \mathbb{C}P(l_i) \times \prod_{j=1}^{b} S^{2m_j},$$

$$(G_1', K_1') \approx \left(\prod_{i=1}^{a} SU(l_i+1) \times \prod_{j=1}^{b} SO(2m_j+1), \prod_{i=1}^{a} S(U(1) \times U(l_i)) \times \prod_{j=1}^{b} SO(2m_j) \right)$$

を得る。但し $\sum_{i=1}^{a} l_i + \sum_{j=1}^{b} m_j = n - k_1 = n - \operatorname{rank} G''_1$.

従って G/K_1 を完全に分類できた。次は G/K_2 についてだが、ここでは簡単のために G/K_2 もトーラス多様体で $n=2$ であると仮定する。すると、次の三通りの可能性が生じる。

(1) $(G, K_1, K_2) = (SU(2) \times T^1, T^1 \times T^1, T^1 \times T^1)$ $(k_1 = 1 = k_2)$。

(2) $(G, K_1, K_2) = (SU(2) \times T^1, SU(2) \times T^1, T^1 \times T^1)$ $(k_1 = 0,\ k_2 = 1)$。

(3) $(G, K_1, K_2) = (U(2), U(2), U(2))$ $(k_1 = 0 = k_2)$。

G/K_2 がトーラス多様体でない場合も次の G/K_1 に関するスライス表現からわかる主イソトロピー群 K と K_2 が偶数次元の球面へ推移的に作用することから G/K_2 の候補を得ることができる。

次はスライス表現を計算して管状近傍を分類してみよう。

3.3. 管状近傍の分類. $G_p = K_1$ のスライス表現を次で表す。

$$\sigma_1 : K_1 = K_1' \times G''_1 \to O(2k_1).$$

σ_1 の像は $SO(2k_1)$ に入ることに注意しておく（K_1 の連結性から)。また $n = 2$ なので、$k_1 = 0$ か 1 になる。

$k_1 = 0$ なら自明な表現のみになるので、$k_1 = 1$ とするとスライス表現は次のように書ける。

$$\sigma_1 : T^1 \times T^1 \to T^1 \quad \text{s.t.} \quad \sigma_1(t_1, t_2) = t_1^a t_2.$$

ここで $a \in \mathbb{Z}$（なぜなら可換群から可換群への表現であり $T'' \subset G''_1$ が $p \in G/K_1$ の法方向に効果的に作用するので)。

従って管状近傍は特異軌道を分類したそれぞれの場合において次のようになり、二つのスライス表現から K の形も以下のようになることがわかる。

(1) $(G \times_{K_1} D^2, G \times_{K_2} D^2)$（$k_1 = 1 = k_2$)。$K_i$ は σ_i を通して D^2 へ作用し、$K = \mathbb{Z}_a \times T^1$.
(2) $(D^4 \subset \mathbb{C}^2, G \times_{K_2} D^2)$（$k_1 = 0, k_2 = 1$)。$K = \mathbb{Z}_a \times T^1 \subset SU(2)$.
(3) (D^4, D^4)（$k_1 = 0 = k_2$)。$K = \{e\}$.

次はこれらの管状近傍を境界に沿って張り合わせてみよう。

3.4. 張り合わせ写像とできる多様体. 張り合わせ写像は管状近傍の境界 G/K からそれ自身への同変写像になるので $N(K;G)/K$ からとってくることができる。また作った多様体がいつ同型になるかは Lemma 3.7 からわかる。

簡単にそれぞれの場合 $N(K;G)/K$ は連結になるので、Lemma 3.7(1) によってどんな張り合わせでも多様体は同相になることがわかる。よって次の命題を得る。

Proposition 3.11. (M, G) をトーラス多様体 (M^4, T^2) が余次元一の軌道を持つように拡張した変換群だとすると、多様体 M は以下のようになる。

(1) $G \times_{K_1} S^2$.
　但し $K_1 \xrightarrow{\sigma_1} T^1$ を通して $S^2 \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ に作用、特にこれは *Hirzebruch* 曲面になる。
(2) $\mathbb{C}P(2)$.
(3) S^4.

また群 G とその作用はそれぞれ

(1) $G = SU(2) \times T^1$ が G の部分に作用.
(2) $G = U(2)$ が標準的に作用.
(3) $G = U(2)$ が $S^4 \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R}$ の $\mathbb{C}^2$ に作用.

となる。

以上の議論を一般の場合に当てはめてやれば Theorem B を得ることができる。

最後にこの研究を進める上で有益な助言を下さった大阪市立大学の枡田幹也先生に感謝します。

REFERENCES

[Bo50] A. Borel: *Le plan projectif de actaves et les spheres comme espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci., Paris, 230 (1950), 1378–1381.

[Br72] G. E. Bredon: Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972.

[Bu-Pa02] V. M. Buchstaber, T. E. Panov: Torus actions and their applications in topology and combinatorics, Amer. Math. Soc., 2002.

[Da-Ja91] M. Davis, T. Januszkiewicz: *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus action*, Duke. Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

[De70] M. Demazure: *Sous-groups algebriques de rang maximum du group de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3(1970), 507–588.

[Gu-Ho-Za06] V. Guillemin, T. S. Holm, C. Zara: *A GKM description of the equivariant cohomology ring of a homogeneous space*, J. Algebraic Combin., 23 (2006), no. 1, 21–41.

[Hat-Ma03] A. Hattori, M. Masuda: *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.

[Har-Ho05] M. Harada, T. S. Holm: *The equivariant cohomology of hypertoric varieties and their real loci*, Comm. Anal. Geom., **13** (2005), no. 3, 527–559.

[Hs-Hs65] W. C. Hsiang, W. Y. Hsiang: *Classification of differentiable actions on* S^n, R^n *and* D^n *with* S^k *as the principal orbit type*, Ann. of Math., **82** (1965), 421–433.

[Ku1] S. Kuroki: *Classification of compact transformation groups on complex quadrics with codimension one orbits*, preprint.

[Ku2] S. Kuroki: *On transformation groups which act on torus manifolds*, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups (2007), 10–26.

[Ma99] M. Masuda: *Unitary toric manifolds, Multi-fans and Equivariant index*, Tôhku. Math. J., **51** (1999), 237–265.

[Ma-Pa06] M. Masuda, T. Panov: *On the cohomology of torus manifolds*, Osaka. J. Math., **43** (2006), 711–746.

[Mo-Sa43] D. Montgomery, H. Samelson: *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math., 44 (1943), 454–470.

[Po59] J. Poncet, *Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les spheres comme espaces homogènes*, Comment. Math. Helv., 33 (1959), 109–120.

[Sc95] R. Scott, *Quaternionic toric variety*, Duke Math. J., 78 (1995), no. 2, 373–397.

[Uc77] F. Uchida: *Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits*, Japan. J. Math. Vol. 3, No. 1, (1977), 141–189.

[小田 85] 小田忠雄: 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店 1985.

[川久保 87] 川久保勝夫: 変換群論, 岩波書店 1987.

[戸田-三村] 戸田宏, 三村護: リー群の位相（上, 下）, 紀伊国屋書店 1978, 1979.

[枡田 06] 枡田幹也: トーリックトポロジー, 2006 年度秋季総合分科会 トポロジー分科会講演アブストラクト, 33–43.

OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE (OCAMI), SUMIYOSI-KU, OSAKA 558-8585, JAPAN

E-mail address: kuroki@sci.osaka-cu.ac.jp